

Objetivos a cubrir

Código : MAT-CDI.9

- Teorema de monotonía. Definición de máximos y mínimos locales y globales.
- Concavidad y puntos de inflexión. Gráfica de una función real.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1 : Encuentre valores a , b , c y d tales que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un mínimo relativo de -3 en $x = 0$ y un máximo relativo de 4 en $x = 1$.

Solución : Tenemos que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pasa por los puntos $(0, -3)$ y $(1, 4)$, así

$$f(0) = a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = -3 \quad \implies \quad d = -3$$

y

$$f(1) = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) - 3 = 4 \quad \implies \quad a + b + c = 7$$

Por otra parte $f'(0) = 0$ y $f'(1) = 0$, entonces como

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c,$$

así

$$f'(0) = 0 \quad \implies \quad 3a(0)^2 + 2b(0) + c = 0 \quad \implies \quad c = 0$$

y

$$f'(1) = 0 \quad \implies \quad 2b(1) + 3a(1)^2 = 0 \quad \implies \quad 3a + 2b = 0$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a + b = 7 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \implies a = -14, \text{ y } b = 21$$

,

Luego

$$a = -14, \quad b = 21, \quad c = 0, \quad d = -3$$



Ejemplo 2 : Determine monotonía, valores extremos, concavidad y puntos de inflexión de la función

$$f(x) = x^{1/2} - x^{3/2}$$

Solución : Observemos, en primer lugar, que el dominio de la función en $[0, \infty)$, para conocer la monotonía de la función debemos estudiar el signo de su primera derivada, donde f' viene dada por

$$f'(x) = (x^{1/2} - x^{3/2})' = (x^{1/2})' - (x^{3/2})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x} = \frac{1 - 3x}{2\sqrt{x}}$$

estudiamos el signo de f' ,

	$\left(0, \frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$
$1 - 3x$	+	-
$2\sqrt{x}$	+	+
f'	+	-
Monotonía	\nearrow	\searrow
	↑	↑
	mínimo	máximo

donde, los valores extremos son

$$\text{Para el valor mínimo : } f(0) = (0)^{1/2} - (0)^{3/2} = 0$$

Para el valor máximo : $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{3/2} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$

entonces

Crecimiento : $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, Decrecimiento : $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$, Valor mínimo : $(0, 0)$, Valor máximo : $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\sqrt{3}\right)$

Estudiamos, ahora, la concavidad de la función f , para ello calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x}\right)' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' - \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)' = -\frac{1}{4x^{3/2}} - \frac{3}{4\sqrt{x}} = -\frac{3x+1}{4x^{3/2}}$$

veamos el signo de f''

	$(0, \infty)$
$-(3x+1)$	$-$
$4x^{3/2}$	$+$
f'	$-$
Concavidad	\cap

por lo tanto, f siempre es concava hacia abajo.

Finalmente

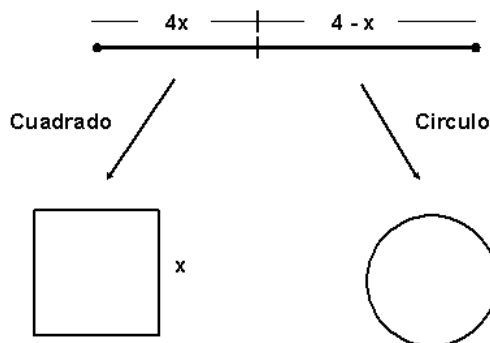
Crecimiento : $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, Decrecimiento : $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$, Valor mínimo : $(0, 0)$, Valor máximo : $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\sqrt{3}\right)$

Concava hacia arriba : \emptyset , Concava hacia abajo : $(0, \infty)$, Punto de inflexión : No tiene

★

Ejemplo 3 : Se tiene un alambre de 4 m de longitud y se divide en dos trozos para formar un cuadrado y un círculo. Expresar el área total encerrada en ambas figuras en función de x , siendo x el lado del cuadrado. Hallar el dominio donde está definida la función. ¿Dónde debe cortarse el alambre si la suma de las dos áreas debe ser mínima.?

Solución : Del alambre de 4 m debemos formar un cuadrado y un círculo de tal forma que cada lado del cuadrado mida x m.



Sea x la longitud del lado del cuadrado. El área del cuadrado es $A_{\text{cuadrado}} = (\text{lado})^2$, mientras que, el área del círculo es $A_{\text{circulo}} = \pi (\text{radio})^2$, por lo tanto

$$A_{\text{cuadrado}} = x^2,$$

deduzcamos el radio del círculo, observemos que el perímetro del círculo es $4-x$, que es la longitud del alambre que tenemos para formar la figura geométrica, puesto que el perímetro del círculo es $P = 2\pi (\text{radio})$, entonces,

$$4-x = 2\pi (\text{radio}) \quad \implies \quad \text{radio} = \frac{4-x}{2\pi},$$

por lo tanto,

$$A_{\text{circulo}} = \pi \left(\frac{4-x}{2\pi} \right)^2 \quad \implies \quad A_{\text{circulo}} = \frac{(4-x)^2}{4\pi}.$$

Luego, el area total es

$$A_{\text{total}}(x) = A_{\text{cuadrado}} + A_{\text{circulo}} = x^2 + \frac{(4-x)^2}{4\pi}$$

cuyo dominio es $\text{Dom } A_{\text{total}} = (0, 1)$. Busquemos donde esta función alcanza sus valores extremos, para ellos derivamos $A = A_{\text{total}}$ y busquemos sus puntos críticos,

$$A'(x) = \left(x^2 + \frac{(4-x)^2}{4\pi} \right)' = 2x - \frac{4-x}{2\pi},$$

Punto crítico estacionario :

$$2x - \frac{4-x}{2\pi} = 0 \quad \implies \quad 2x = \frac{4-x}{2\pi} \quad \implies \quad 4\pi x = 4-x \quad \implies \quad (4\pi+1)x = 4 \quad \implies \quad x = \frac{4}{4\pi+1}$$

Usamos el criterio de la segunda derivada para conocer si en este punto estacionario se alcanza un valor mínimo ó un valor máximo.

$$f''(x) = \left(2x - \frac{4-x}{2\pi} \right)' = 2 + \frac{1}{2\pi},$$

observemos que f'' siempre es positiva, en particular en $x = \frac{4}{4\pi+1}$, por lo tanto, f tiene un valor mínimo en $x = \frac{4}{4\pi+1}$, así, se debe cortar el alambre en este punto para obtener el área minima. ★

Ejemplo 4 : Encuentre los puntos de la parábola $x = 2y^2$ que están más cercanos al punto $(10, 0)$

Solución : Sea $A(x, y)$ un punto de la parábola $x = 2y^2$, entonces la distancia entre el punto A y el punto $B(10, 0)$ viene dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(x-10)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-10)^2 + y^2}, \quad \longleftarrow \quad \text{Función que depende de } x \text{ y } y$$

puesto que, el punto $A(x, y)$ está sobre la parábola, entonces dicho punto satisface la ecuación de la parábola, de allí, $x = 2y^2$, y tenemos que $y^2 = \frac{x}{2}$, así,

$$d(A, B) = \sqrt{(x-10)^2 + \frac{x}{2}} \quad \longleftarrow \quad \text{Función que depende de } x$$

deseamos hallar un valor mínimo de la función $d(x)$, para ello derivamos, pero observe que la función d es la composición de la función raíz cuadrada y de la función cuadrática, como la función raíz cuadrada es creciente, entonces, podemos hallar el valor mínimo de la función

$$f(x) = (x-10)^2 + \frac{x}{2}$$

y donde la función f alcance su valor mínimo, allí también lo alcanza la función d (¿por qué?)

Busquemos, entonces, donde la función f alcanza su valor mínimo, derivamos

$$f'(x) = 2(x-10) + \frac{1}{2}$$

Punto crítico estacionario :

$$f'(x) = 0 \quad \implies \quad 2(x-10) + \frac{1}{2} = 0 \quad \implies \quad 2(x-10) = -\frac{1}{2} \quad \implies \quad x = \frac{39}{4}$$

Usamos el criterio de la segunda derivada para conocer si en este punto estacionario se alcanza un valor mínimo ó un valor máximo.

$$f''(x) = \left(2(x-10) + \frac{1}{2} \right)' = 2,$$

observemos que f'' siempre es positiva, en particular en $x = \frac{39}{4}$, por lo tanto, f tiene un valor mínimo en $x = \frac{39}{4}$, así,

$$y^2 = \frac{1}{2} \frac{39}{4} \quad \implies \quad y = \pm \sqrt{\frac{39}{8}}$$

Luego, los puntos de la parábola $x = 2y^2$ que están más cercanos al punto $(10, 0)$ son

$$\left(\frac{39}{4}, -\sqrt{\frac{39}{8}}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{39}{4}, \sqrt{\frac{39}{8}}\right)$$



Ejemplo 5 : Grafique $f(x) = x^{1/2} - x^{3/2}$

Solución : Para obtener un esbozo de la gráfica de f se recomienda conocer

- | | | |
|----------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| 1. Dominio | 2. Punto de corte con los ejes | 3. Valor(es) máximo(s) |
| 4. Valor(es) mínimo(s) | 5. Intervalos de decrecimiento | 6. Intervalos de crecimiento |
| 7. Concavidad hacia arriba | 8. Concavidad hacia abajo | 9. Puntos de inflexión |
| 10. Asíntota horizontal | 11. Asíntota vertical | 12. Asíntota oblicua |

En el ejemplo 2 se estudiaron gran parte de estas propiedades de la función f , nos falta conocer los puntos de cortes con los ejes coordenados y el comportamiento asintótico.

Puntos de cortes con los ejes :

- Eje x : ($y = 0$)

$$0 = x^{1/2} - x^{3/2} \implies x^{1/2}(1 - x) = 0 \implies x = 0 \text{ y } x = 1,$$

por lo tanto, f corta al eje x en los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0)$.

- Eje y : ($x = 0$)

$$y = (0)^{1/2} - (0)^{3/2} \implies y = 0,$$

por lo tanto, f corta al eje y en el punto $(0, 0)$.

Comportamiento asintótico :

- Asíntota vertical : Como $\text{Dom } f = [0, \infty)$, la función no tiene asíntota vertical
- Asíntota horizontal :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^{1/2} - x^{3/2})$$

el cual es una indeterminación de la forma $\infty - \infty$, levantamos la indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^{1/2} - x^{3/2}) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/2}(1 - x) = -\infty,$$

por lo que f no tiene asíntota horizontal.

- Asíntota oblicua :

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1/2} - x^{3/2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1/2}(1 - x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x}{x^{1/2}}$$

el cual es una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, dividimos cada término de la expresión entre la mayor potencia, en este caso, dividimos entre x

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{x}{x}}{\frac{x^{1/2}}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x^{1/2}}} \rightarrow -\infty$$

por lo que f no tiene asíntota oblicua.

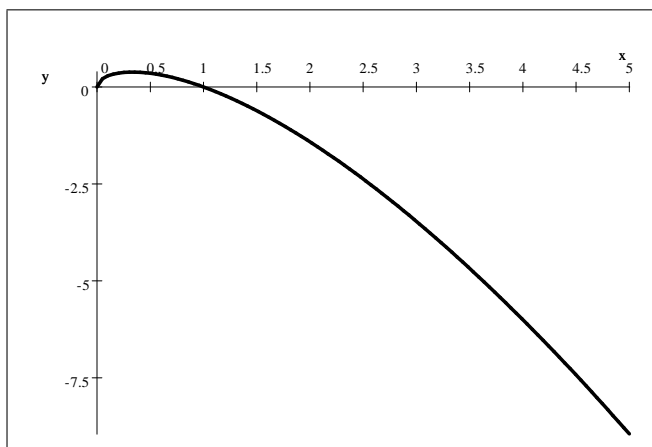
Finalmente

Dominio : $[0, \infty)$, Punto corte con el eje x : $(0, 0)$, $(1, 0)$, Punto corte con el eje y : $(0, 0)$,

Crecimiento : $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, Decrecimiento : $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$, Valor mínimo : $(0, 0)$, Valor máximo : $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\sqrt{3}\right)$

Concava hacia arriba : \emptyset , Concava hacia abajo : $(0, \infty)$, Punto de inflexión : No tiene

Asíntota vertical : No tiene, Asíntota horizontal : No tiene, Asíntota oblicua : No tiene



Ejemplo 6 : Grafique $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

Solución : Para obtener un esbozo de la gráfica de f se recomienda conocer

- | | | |
|----------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| 1. Dominio | 2. Punto de corte con los ejes | 3. Valor(es) máximo(s) |
| 4. Valor(es) mínimo(s) | 5. Intervalos de decrecimiento | 6. Intervalos de crecimiento |
| 7. Concavidad hacia arriba | 8. Concavidad hacia abajo | 9. Puntos de inflexión |
| 10. Asíntota horizontal | 11. Asíntota vertical | 12. Asíntota oblicua |

Dominio : Observemos que la función f tiene sentido sólo si $x \neq 1$, luego $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$.

Puntos de cortes con los ejes :

- Eje x : ($y = 0$)

$$0 = \frac{x^3}{(x-1)^2} \implies x^3 = 0 \implies x = 0,$$

por lo tanto, f corta al eje x en el punto $(0, 0)$.

- Eje y : ($x = 0$)

$$y = \frac{(0)^3}{((0)-1)^2} \implies y = 0,$$

por lo tanto, f corta al eje y en el punto $(0, 0)$.

Monotonía : Para conocer la monotonía de la función debemos estudiar el signo de su primera derivada, donde f' viene dada por

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(x^3)'(x-1)^2 - x^3((x-1)^2)'}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

estudiamos el signo de f' ,

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
x^2	+	+	+	+
$x-3$	-	-	-	+
$(x-1)^3$	-	-	+	+
f'	+	+	-	+
Monotonía	\nearrow	\nearrow	\searrow	\nearrow

\uparrow \uparrow
 No es valor extremo mínimo

donde, el valor extremo es

$$\text{Valor m\u00ednimo : } f(3) = \frac{(3)^3}{((3) - 1)^2} = \frac{27}{4}$$

entonces

$$\begin{aligned} \text{Crecimiento : } & (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \infty), & \text{Decrecimiento : } & (1, 3), \\ \text{Valor m\u00ednimo : } & \left(3, \frac{27}{4}\right), & \text{Valor m\u00e1ximo : } & \text{No tiene} \end{aligned}$$

Concavidad : Estudiemos, ahora, la concavidad de la funci\u00f3n f , para ello calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = \left(\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}\right)' = \frac{(x^2(x-3))' - x^2(x-3)((x-1)^3)'}{(x-1)^6} = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

veamos el signo de f''

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$6x$	-	+	+
$(x-1)^4$	+	+	+
f'	-	+	+
Concavidad	\frown	\smile	\smile

\uparrow \uparrow
 Punto de inflexi\u00f3n No es punto de inflexi\u00f3n

donde, el punto de inflexi\u00f3n es

$$\text{Punto de inflexi\u00f3n : } f(0) = \frac{(0)^3}{((0) - 1)^2} = 0$$

entonces

$$\text{Concava hacia arriba : } (0, 1) \cup (1, \infty), \quad \text{Concava hacia abajo : } (-\infty, 0), \quad \text{Punto de inflexi\u00f3n : } (0, 0)$$

Comportamiento asint\u00f3tico :

- As\u00edntota vertical : Como $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$, entonces, una **posible** as\u00edntota vertical es $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \infty$$

luego, $x = 1$ es una as\u00edntota vertical.

- As\u00edntota horizontal :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

el cual es una indeterminaci\u00f3n de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, dividimos cada t\u00e9rmino de la expresi\u00f3n entre la mayor potencia, en este caso, dividimos entre x^3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \rightarrow \infty$$

similarmente

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \rightarrow -\infty$$

por lo que f no tiene as\u00edntota horizontal.

• Asíntota oblicua :

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1}\right)^2$$

el cual es una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, dividimos cada término de la expresión entre la mayor potencia, en este caso, dividimos entre x

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1,$$

por lo tanto, $m = (1)^2 = 1$, calculamos el punto de corte de la asíntota oblicua con el eje y ,

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{(x-1)^2}$$

el cual es una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, dividimos cada término de la expresión entre la mayor potencia, en este caso, dividimos entre x^2 , así,

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{(x-1)^2} = 2.$$

Similarmente para $-\infty$, por lo que f tiene una asíntota oblicua igual a $y = x + 2$.

Finalmente

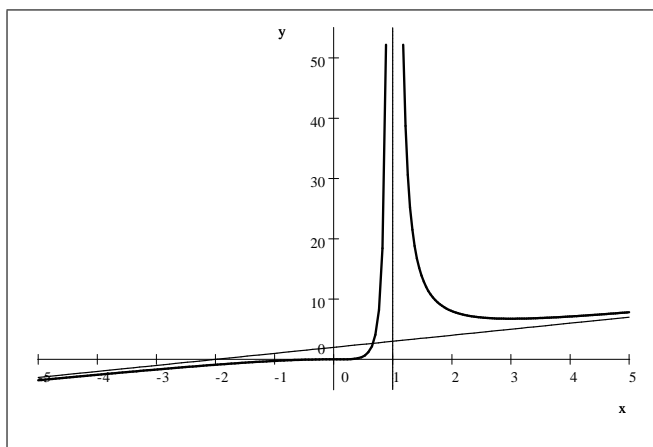
Dominio : $\mathbb{R} - \{1\}$, Punto corte con el eje x : $(0, 0)$, Punto corte con el eje y : $(0, 0)$,

Crecimiento : $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \infty)$, Decrecimiento : $(1, 3)$,

Valor mínimo : $\left(3, \frac{27}{4}\right)$, Valor máximo : No tiene,

Concava hacia arriba : $(0, 1) \cup (1, \infty)$, Concava hacia abajo : $(-\infty, 0)$, Punto de inflexión : $(0, 0)$,

Asíntota vertical : $x = 1$, Asíntota horizontal : No tiene, Asíntota oblicua : $y = x + 2$



★

Ejercicios

1. Encuentre los intervalos en los que f es creciente o decreciente.

1. $f(x) = 20 - x - x^2$

2. $f(x) = x^3 - x + 1$

3. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 18x + 5$

4. $f(x) = x^3 + x + 1$

5. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

6. $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3$

7. $f(x) = 2x^2 - x^4$ 8. $f(x) = x^2(1-x)^2$ 9. $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x$
 10. $f(x) = x^4 + 4x + 1$ 11. $f(x) = x^3(x-4)^4$ 12. $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$
 13. $f(x) = x\sqrt{6-x}$ 14. $f(x) = x^{2/3}(x-2)^2$ 15. $f(x) = x^{1/5}(x+1)$
 16. $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}$ 17. $f(x) = x\sqrt{x-x^2}$ 18. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$
 19. $f(x) = x^2\sqrt[3]{6x-7}$ 20. $f(x) = x^6 + 192x + 17$ 21. $f(x) = 2\tan x - \tan^2 x$

2. ¿Qué condiciones sobre a , b y c harán a $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ siempre creciente?
 3. Considere la función $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, siendo $A > 0$. Demuestre que $f(x) \geq 0$, para toda x , si y solo si, $B^2 - 4AC \leq 0$
 4. Use el Teorema de monotonía para demostrar cada proposición si $0 < x < y$

$$(a) \quad x^2 < y^2 \qquad (b) \quad \sqrt{x} < \sqrt{y} \qquad (c) \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$$

5. Suponga que $f'(x) > 0$ y $g'(x) > 0$, para toda x . ¿Qué condiciones adicionales simples (si las hay) se necesitan para garantizar que
 (a) $f(x) + g(x)$ es creciente para toda x
 (b) $f(x)g(x)$ es creciente para toda x
 (c) $f(g(x))$ es creciente para toda x ?

6. Demuestre que

$$a + \frac{1}{a} < b + \frac{1}{b} \quad \text{siempre que} \quad 1 < a < b$$

7. Demuestre que

$$\frac{\tan b}{\tan a} > \frac{b}{a} \quad \text{siempre que} \quad 0 < a < b < \frac{\pi}{2}$$

8. Encuentre los valores extremos locales y absolutos de la función dada

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$, $-1 \leq x \leq 1$ 2. $f(x) = x + 1/x$, $0.5 \leq x \leq 3$
 3. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, $-5 \leq x \leq 5$ 4. $g(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$, $-4 \leq x \leq 0$
 5. $h(x) = x + \sqrt{1-x}$, $0 \leq x \leq 1$ 6. $g(x) = \sin x - \cos x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$

9. Encuentre los valores máximos y mínimos locales de las funciones f dadas en el ejercicio 1

10. Si $f'(x) = 2(x+2)(x+1)^2(x-2)^4(x-3)^3$, ¿Qué valor de x hace de $f(x)$ un máximo local? ¿Un mínimo local?

11. Considere la función $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Demuestre que el mínimo relativo es mayor que el máximo relativo.

12. Demuestre que $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ no tiene valores críticos cuando $ad - bc \neq 0$. ¿Qué sucede cuando $ad - bc = 0$.

13. Encuentre valores a , b y c tales que $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un máximo relativo de 6 en $x = 2$ y que la gráfica de f tenga intersección y igual a 4.

14. Encuentre valores a , b , c y d tales que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un mínimo relativo de -3 en $x = 0$ y un máximo relativo de 4 en $x = 1$.

15. Para cada una de las siguientes funciones encuentre los intervalos de concavidad

1. $f(x) = x^3 - x$ 2. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x$ 3. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$
 4. $g(x) = x^4 - 6x^2$ 5. $g(x) = 8 - \sqrt[3]{x}$ 6. $g(x) = 4 + 72x - 3x^2 - x^3$
 7. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$ 8. $h(x) = (x^2 - 1)^3$ 9. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$
 10. $F(x) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$ 11. $G(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$ 12. $G(x) = x\sqrt{x+1}$
 13. $P(x) = x^{1/3}(x+3)^{2/3}$ 14. $Q(x) = x \arcsen x$ 15. $f(\theta) = \sen^2 \theta$
 16. $g(\theta) = \cos^2 \theta$ 17. $h(t) = t + \arctan t$ 18. $f(t) = t + \cos t$

16. Demuestre que la gráfica de una función polinomial cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, es cóncava hacia arriba en el eje x cuando $a > 0$ y cóncava hacia abajo cuando $a < 0$.
17. Determine a y b tal que $f(x) = a\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{x}}$ tenga el punto $(4, 13)$ como un punto de inflexión.
18. Si $f(x) = ax^3 + bx^2$, determinar a y b tales que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en $(1, 2)$
19. Encuentre una función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que tenga un valor máximo local de 3 en $x = -2$ y un valor mínimo local de 0 en $x = 1$
20. ¿Para qué valores de a y b la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ tendrá un máximo local cuando $x = -3$ y un mínimo local cuando $x = -1$?
21. Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determinar a , b , c y d tales que f tenga un extremos relativo en $(0, 3)$ y tal que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en $(1, -1)$
22. Suponga que $f''(x) > 0$ y $g''(x) > 0$, para toda x . ¿Qué condiciones adicionales simples (si las hay) se necesitan para garantizar que
- $f(x) + g(x)$ es cóncava hacia arriba para toda x
 - $f(x)g(x)$ es cóncava hacia arriba para toda x
 - $f(g(x))$ es cóncava hacia arriba para toda x ?
23. Demuestre que una ecuación cuadrática no tiene puntos de inflexión.
24. Demuestre que una ecuación cúbica tiene exactamente un punto de inflexión.
25. Encuentre valores a , b y c tales que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ pase por $(-1, 0)$ y tenga un punto de inflexión en $(1, 1)$.
26. Obtenga valores de a , b y c tales que la gráfica de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ tenga una tangente horizontal en el punto de inflexión $(1, 1)$.
27. Sea $f(x) = (x - x_0)^n$, donde n es un entero positivo.
- Demuestre que $(x_0, 0)$ es un punto de inflexión de la gráfica de f si n es impar.
 - Demuestre que $(x_0, 0)$ no es un punto de inflexión de la gráfica de f , pero que corresponde a un mínimo relativo cuando n es par.
28. ¿Qué conclusiones puede sacar acerca de f de la información $f'(c) = f''(c) = 0$ y $f'''(c) = 0$?
29. Determine monotonía, valores extremos, concavidad y puntos de inflexión de la función
- $h(x) = 3x^3 + 2x - 1$
 - $g(x) = \frac{x^2}{x+2} + 3$
 - $f(x) = x - \sqrt{x}$
 - $g(x) = x(2-x)^{1/3}$
 - $f(x) = x^{1/3}(6-x)^{2/3}$
 - $f(x) = 3x^5 - 5x^3$
 - $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}$
 - $f(x) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$
 - $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$
 - $f(x) = x^{1/2} - x^{3/2}$
 - $g(x) = \frac{1}{x-1}$
 - $g(x) = 1 + x^{1/3}$
 - $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 5$
 - $h(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$
 - $y = \frac{x^2}{x+1}$
 - $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$
30. Bosqueje la posible gráfica de una función f que tenga las siguientes propiedades:
- f es continua;
 - $f(-2) = 3$; $f(3) = -2$;
 - $f'(x) = 0$ si $x > 2$;
 - $f''(x) < 0$ si $x < 2$
31. Bosqueje la posible gráfica de una función f que tenga las siguientes propiedades
- f es continua
 - $f(2) = -3$, $f(6) = 1$
 - $f'(2) = 0$, $f'(x) > 0$, para $x \neq 0$, $f'(6) = 3$
 - $f''(6) = 0$, $f''(x) > 0$, para $2 < x < 6$, $f''(x) < 0$, para $x > 6$
32. Bosqueje la posible gráfica de una función f que tenga las siguientes propiedades:
- f es continua en $(0, 2)$;
 - f tiene una máximo relativo en $x = 1$, pero $f'(1)$ no existe.

33. Trazar la gráfica de una función que satisfaga todas las condiciones siguientes

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2 \quad b) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \quad c) f(0) = 3 \quad d) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \quad e) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

34. Dibuje la gráfica de una función continua f en el intervalo $[0, 6]$ que satisfaga todas las condiciones establecidas.

$$(a) \begin{cases} f(0) = f(4) = 1; f(2) = 2; f(6) = 0 \\ f'(x) > 0 \text{ en } (0, 2); f'(x) < 0 \text{ en } (2, 4) \cup (4, 6) \\ f'(2) = f'(4) = 0; f''(x) > 0 \text{ en } (0, 1) \cup (3, 4); \\ f''(x) < 0 \text{ en } (1, 3) \cup (4, 6) \end{cases} \quad (b) \begin{cases} f(0) = 3; f(3) = 0; f(6) = 4 \\ f'(x) < 0 \text{ en } (0, 3); f'(x) > 0 \text{ en } (3, 6) \\ f''(x) > 0 \text{ en } (0, 5); f''(x) < 0 \text{ en } (5, 6) \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} f(0) = 3; f(2) = 2; f(6) = 0 \\ f'(x) < 0 \text{ en } (0, 2) \cup (2, 6); f'(2) = 0 \\ f''(x) < 0 \text{ en } (0, 1) \cup (2, 6); \\ f''(x) > 0 \text{ en } (1, 2) \end{cases} \quad (d) \begin{cases} f(0) = f(3) = 3; f(2) = 4; f(4) = 2; f(6) = 0; \\ f'(x) > 0 \text{ en } (0, 2); f'(x) < 0 \text{ en } (2, 4) \cup (4, 5) \\ f'(2) = f'(4) = 0; f'(x) = -1 \text{ en } (5, 6); \\ f''(x) < 0 \text{ en } (0, 3) \cup (4, 5); f''(x) > 0 \text{ en } (3, 4) \end{cases}$$

35. Dibuje una gráfica de una función continua f que cumpla con las siguientes propiedades

$$(a) \begin{cases} f(-1) = 0; f(0) = 1; \\ f'(3) \text{ no existe}; f'(5) = 0 \\ f'(x) > 0 \text{ en } x < 3 \text{ y } x > 5; \\ f'(x) < 0 \text{ en } (3, 5) \end{cases} \quad (b) \begin{cases} f(0) = 0; \\ f'(-1) = 0; f'(0) = 0; f'(1) = 0 \\ f'(x) < 0 \text{ en } x < -1 \text{ y } -1 < x < 0; \\ f'(x) > 0 \text{ en } 0 < x < 1 \text{ y } x > 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} f(-2) = 0; f(4) = 0 \\ f'(3) = 0; f''(1) = 0; f''(2) = 0 \\ f''(x) < 0 \text{ en } x < 1 \text{ y } x > 2; \\ f''(x) > 0 \text{ en } 1 < x < 2 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} f(0) = 5; f(2) = 0 \\ f'(2) = 0; f''(3) \text{ no existe} \\ f''(x) > 0 \text{ en } x < 3 \\ f''(x) < 0 \text{ en } x > 3 \end{cases}$$

36. Bosqueje la posible gráfica de una función f que tenga las siguientes propiedades

- (a) f es continua en toda su extensión
- (b) $f(-3) = 1$;
- (c) $f'(x) < 0$, para $x < -3$, $f'(x) > 0$, para $x > -3$, $f''(x) < 0$, para $x \neq -3$.

37. Bosqueje la posible gráfica de una función f que tenga las siguientes propiedades

- (a) f es continua en toda su extensión
- (b) $f(-4) = -3$, $f(0) = 0$, $f(3) = 2$;
- (c) $f'(-4) = 0$, $f'(3) = 0$, $f'(x) > 0$, para $x < -4$, $f'(x) > 0$, para $-4 < x < 3$, $f'(x) < 0$, para $x > 3$.
- (d) $f''(-4) = 0$, $f''(0) = 0$, $f''(x) < 0$, para $x > -4$, $f''(x) > 0$, para $-4 < x < 0$, $f''(x) < 0$, para $x > 0$.

38. Bosqueje la posible gráfica de una función f que tenga las siguientes propiedades:

- a) $f(0) = 2$; $f(2) = f(-2) = 1$; c) $f'(x) > 0$ para $x < 0$; $f'(x) < 0$ para $x > 0$;
- b) $f'(0) = 0$; d) $f''(x) < 0$ para $|x| < 2$; $f''(x) > 0$ para $|x| > 2$.

39. Grafique una función que satisfaga las siguientes condiciones

Función 1

Máximo local en $(0, -2)$
 Mínimo local en $(4, 6)$
 Asíntota vertical en $x = 2$
 Asíntota oblicua $y = x$
 Sin asíntotas horizontales
 Sin puntos de inflexión

Función 2

Máximo local en $(-2, 3)$
 Mínimo local en $(4, -1)$
 Puntos de Inflexión en $(-4, 0)$, $(0, 1)$ y $(6, 1)$
 Asíntota horizontal en $y = 3$, cuando $x \rightarrow \infty$
 Sin asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$
 Sin asíntotas verticales

Función 3

Función par
 Mínimo local en $(2, -1)$
 Puntos de Inflexión en $(1, 1)$ y $(4, 0)$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

Función 4

Simétrica con el origen
 Asíntota vertical en $x = -1$
 Asíntota horizontal en $y = 2$
 No hay puntos de la gráfica para $x \leq 1$

Función 5

Simétrica con el eje y
 Asíntota vertical en $x = 2$
 Mínimos en $(1, 0)$ y $(4, 2)$
 Máximo en $(0, 3)$
 Punto de inflexión en $(1/2, 2)$
 No tiene asíntota horizontal

Función 6

Simétrica con el origen
 Máximo local en $(-2, 2)$
 Mínimo local en $(2, -2)$
 Puntos de Inflexión en $(-1.4, 1.2)$, $(0, 0)$ y $(1.4, -1.2)$
 Sin asíntotas horizontales
 Sin asíntotas verticales

40. Las siguientes tablas representan las características principales de ciertas funciones reales de variable real, esbozar sus gráficas.

(a)

	$-\infty$		$1/2$		1		∞
$f'(x)$		-		-		-	
$f''(x)$		+		-		+	
$f(x)$	5	\searrow	$1/4$	\searrow	$-\infty$	\searrow	

(b)

	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞
$f'(x)$	-	+	+	-	-	+	
$f''(x)$	+	+	-	-	+	+	
$f(x)$	∞	\searrow	-1	\nearrow	$\frac{-1}{5}$	\searrow	$\frac{-1}{5}$
				0		-1	\nearrow
							∞

(c)

	$-\infty$	-2	0	2	∞
$f'(x)$	+	+	-	-	
$f''(x)$	+	-	-	+	
$f(x)$	1	\nearrow	∞	\nearrow	0
				\searrow	$-\infty$
				$-\infty$	\searrow
					1

(d)

	$-\infty$	0	1	2	∞
$f'(x)$	+	-	-	+	
$f''(x)$	-	-	+	+	
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	3	\searrow	1
				\searrow	1
					\nearrow
					∞

(e)

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	∞
$f'(x)$	-	-	+	+	-	-	
$f''(x)$	-	+	+	-	-	+	
$f(x)$	0	\searrow	$\frac{-\sqrt{3}}{4}$	\searrow	$\frac{-1}{2}$	\nearrow	0
						\searrow	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
							\searrow
							$\frac{1}{2}$

(f)

	$-\infty$		-1		0		2		∞
$f'(x)$		-		-		+		-	
$f''(x)$		+		-		-		-	
$f(x)$	∞	\searrow	6	\searrow	0	\nearrow	5	\searrow	$-\infty$

(g)

	$-\infty$		-4		0		4		∞
$f'(x)$		+		+		+		+	
$f''(x)$		+		-		+		-	
$f(x)$	1	\nearrow		\nearrow	0	\nearrow		\nearrow	-1

(h)

	$-\infty$		-2		1		4		6		∞
$f'(x)$		+		-		+		-		-	
$f''(x)$		+		+		+		-		+	
$f(x)$	-1	\nearrow		0	\searrow	-2	\nearrow		-1	\searrow	-2

(i)

	$-\infty$		-5		-4		2		∞
$f'(x)$		-		-		+		-	
$f''(x)$		-		-		+		+	
$f(x)$		\searrow	0	\searrow		\nearrow		5	\searrow

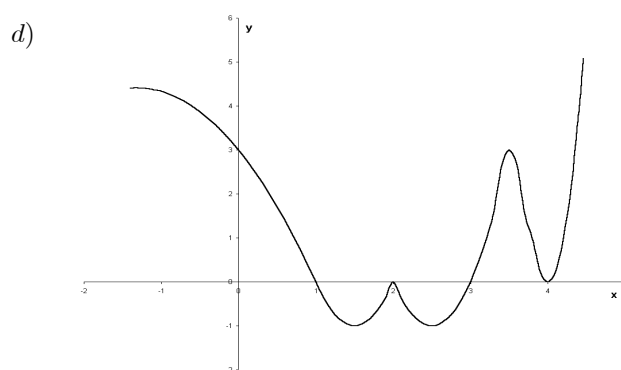
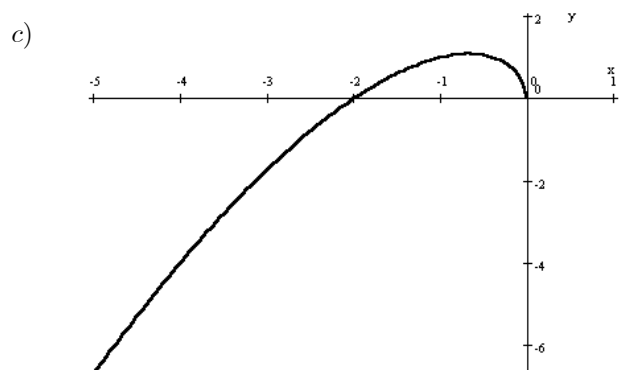
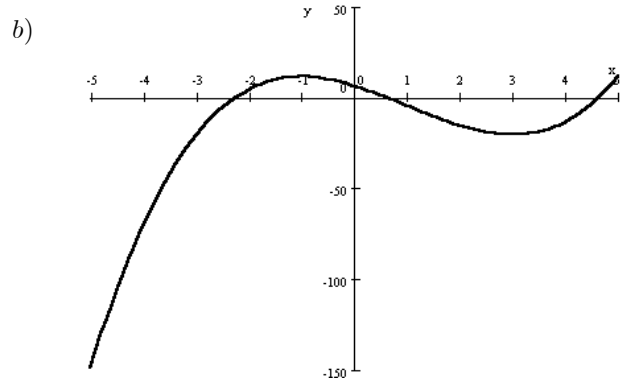
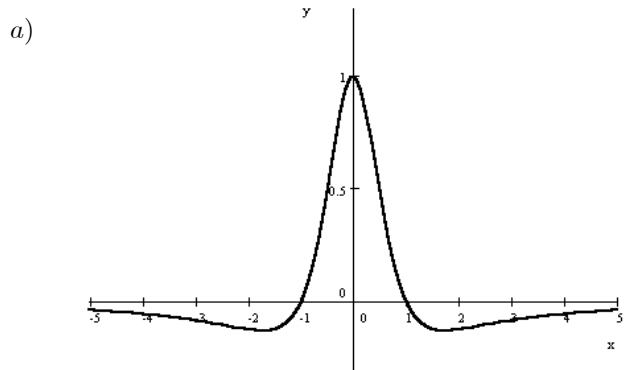
(j)

	$-\infty$		-4		-2		0		1		3		5		6		∞
$f'(x)$		-		+		-		-		+		+		-		+	
$f''(x)$		-		-		-		+		+		-		-		-	
$f(x)$		\searrow		\nearrow	1	\searrow		\searrow	0	\nearrow	2	\nearrow		3	\searrow		\nearrow

(k)

	$-\infty$		-2		0		2		∞
$f'(x)$		+		+		-		-	
$f''(x)$		+		-		-		+	
$f(x)$	-2	\nearrow		0	\nearrow	3	\searrow	2	\searrow

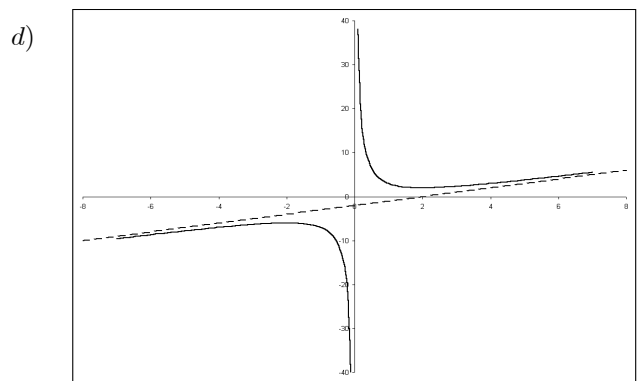
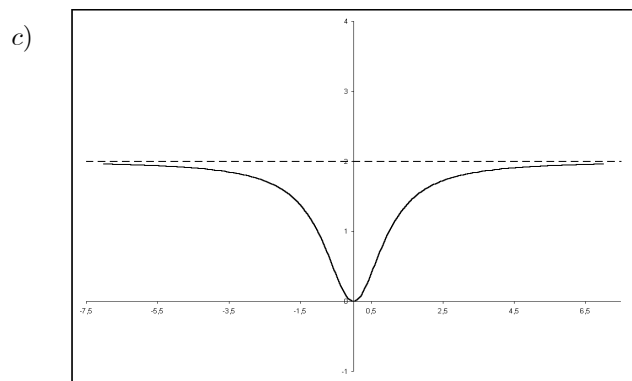
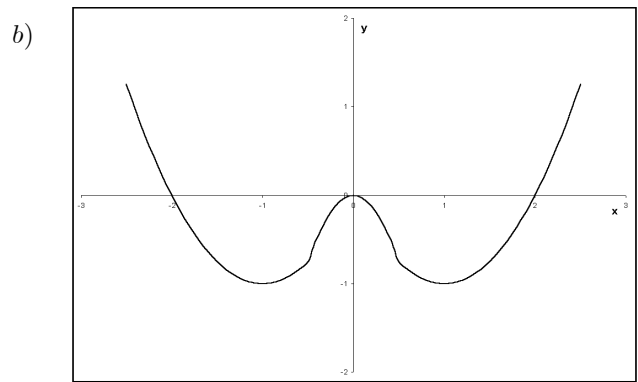
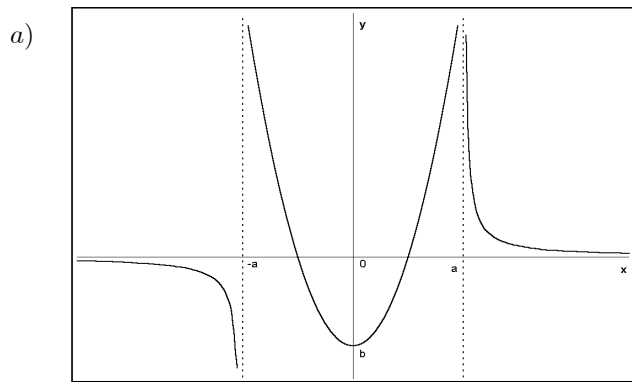
41. La siguiente gráfica corresponde a la derivada de una cierta función f : a. Halle los extremos relativos de dicha función; b. Trace una gráfica aproximada de f



42. Dadas las siguientes gráficas de funciones, construya una tabla que contenga:

1. Signo de f' y f''
2. Intervalos de crecimiento y decrecimiento de f
3. Valores extremos.
4. Intervalos de concavidad y puntos de inflexión

Especifique el dominio y el rango de la función.

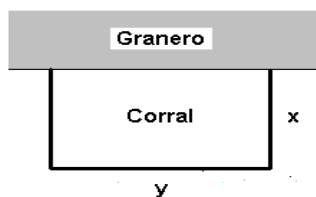


43. Grafique las siguientes funciones, haciendo el análisis correspondiente

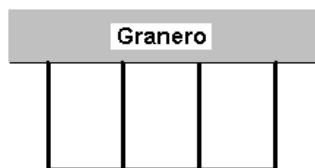
1. $f(x) = 2 + (x - 3)^{2/3}$	2. $f(x) = \frac{(x + 1)^2}{x^2 + 1}$	3. $f(x) = \frac{1}{x - 1} - x$	4. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$
5. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$	6. $y = \frac{1}{x - 1} + 2$	7. $y = 2 + (x - 3)^{1/3}$	8. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}$
9. $y = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1$	10. $f(x) = \frac{x^3}{(x - 1)^2}$	11. $f(x) = x^{1/3} + x^{4/3}$	12. $y = (x + 2)\sqrt{-x}$
13. $y = (x - 1)^2(x + 1)^2$	14. $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$	15. $f(x) = 3x^{2/3} - 2x$	16. $y = \frac{x^2 + 2x - 4}{x^2}$
17. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$	18. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 2}}$	19. $f(x) = 3x^{4/3} - 4x$	20. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$
21. $f(x) = 3x^5 + 5x^3$	22. $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x - 5}}$	23. $y = 5x^{2/3} - x^{5/3}$	24. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

44. Encuentre dos números cuyo producto sea -12 y la suma de sus cuadrados sea mínima.
45. Dos postes de 15 m y 20 m de altura, están situados a una distancia de 21 m y se quieren unir sus extremos superiores por una cable que en un punto intermedio debe tocar el suelo. Ubicar el punto donde el cable toca el piso para que la longitud sea mínima.
46. Un triángulo rectángulo está formado por los segmentos positivos y una recta que pasa por el punto $(2, 3)$. Hallar los vértices de modo que su área sea mínima.
47. El perímetro combinado de un triángulo equilátero y de un cuadrado es 10. Hallar las dimensiones de ambas figuras que producen la mínima área total.
48. Un campesino tiene 100 metros de alambre y quiere usarlos para formar tres lados de un huerto rectangular siendo el cuarto lado la pared de la casa ¿Cuáles dimensiones del huerto encerrarán la máxima área posible con el alambre?
49. Encontrar las dimensiones del rectángulo de perímetro mínimo cuya área es de 16m^2
50. Determine dos números no negativos cuya suma sea 10 y cuyo producto sea tan grande como sea posible.
51. El barco A está a 30 millas del punto O a medianoche y se dirige hacia el Oeste a 15 mi/h. El barco B está a 20 millas al Norte de O a medianoche y se dirige hacia el Sur a 15 mi/h. Calcular cuándo están más cercanos los dos barcos entre sí y calcular esa distancia mínima.
52. Un hombre se encuentra en un punto A de la orilla de un río rectilíneo de 3 km. de ancho y desea llegar a un punto B , situado a 8 km. río abajo en la orilla opuesta, lo más rápidamente. El hombre puede remar en su bote cruzando el río directamente hacia el punto C y luego correr hacia B , o bien puede remar directo hacia B , o puede remar hasta cierto punto D entre C y B , luego correr hacia B . Si rema a 6 km/h y corre a 8 km/h. ¿En qué punto se debe desembarcar para llegar al punto B lo más pronto posible?
53. Un cable de longitud l se va a cortar en dos trozos para formar con ellos un cuadrado y un triángulo equilátero. ¿Donde hacer el corte si la suma de las dos áreas debe ser mínima?
54. Juan tiene 200 pies de tela de alambre con la que planea cercar un patio rectangular para su perro. Si desea que el área sea máxima. ¿Cuáles deben ser las dimensiones?
55. Una hoja de propaganda debe contener 50 cm^2 de material impreso, con 4 cm de margen arriba y abajo y 2 cm de márgenes laterales. ¿Qué dimensiones debe tener la hoja para que el gasto de papel sea mínimo?
56. Si una cabilla de 80 cm de longitud se dobla para formar una "L", ¿cuál es la distancia más corta que existe entre los extremos de la cabilla doblada?
57. Una ventana tiene forma rectangular en la parte inferior y semicircular en la parte superior. Hallar las dimensiones cuando el perímetro es de 12 m y el área es máxima.
58. La sección transversal de una viga rectangular de madera cortada de un tronco circular de diámetro 120 cm. tiene longitud x y anchura y . La resistencia de la viga varia en proporción directa al producto de la longitud y al cuadrado del ancho. Calcular las dimensiones de la sección transversal de la viga de mayor resistencia.

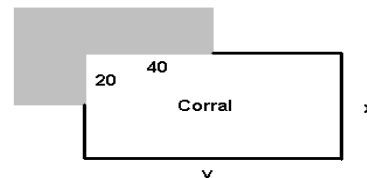
59. Hallar la distancia mínima del punto $P(4, 2)$ a la parábola $y^2 = 8x$.
60. Un fabricante de cajas de cartón desea hacer cajas abiertas de piezas de cartón de 12 pul cuadradas, cortando cuadrados iguales de las cuatro esquinas y doblando los lados. Encontrar la longitud del lado del cuadrado que se debe cortar para obtener una caja cuyo volumen sea el mayor posible.
61. La granja Victoria tiene 80 pies de tela de alambre con la que se planea cercar un corral rectangular al lado de un granero de 100 pies de largo, como se muestra en la figura (el lado que está junto al granero no necesita cerca). ¿Cuáles son las dimensiones del corral de máxima área?
62. La granja Victoria del Problema 61 decide hacer tres corrales idénticos con sus 80 pies de tela de alambre, como se muestra en la figura. ¿Qué dimensiones debe tener el cercado total para que el área de los corrales sea tan grande como se pueda?
63. Suponga que el dueño de la granja del Problema 61 decide usar 80 pies de cerca para construir un corral rectangular que se ajuste a una esquina de 20×40 pies, como se muestra en la figura (toda la esquina debe ser aprovechada y no necesita barda). ¿Qué dimensiones darán al corral la área máxima?



Ejercicio 61



Ejercicio 62



Ejercicio 63

64. Un alambre de longitud 1 metro se va a cortar en dos partes. Una se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un círculo. ¿Dónde debe cortarse el alambre si la suma de las dos áreas debe ser mínima?
65. P es un punto en el primer cuadrante sobre la curva $y = 7 - x^2$. Por P se traza la tangente a la curva y sean A y B los puntos en que corta a los ejes coordenados. Hallar la ordenada de P para que AB sea mínimo.
66. Dos postes de 5 m y 7 m de altura, tienen una separación de 30 m y se han de sujetar con cables fijados en un solo punto, desde el suelo a los extremos superiores de los postes. ¿Dónde se han de fijar los cables para que la cantidad a emplear sea mínima?
67. Encuentre los puntos de la parábola $x = 2y^2$ que están más cercanos al punto $(10, 0)$
68. Se va a cortar una viga rectangular de un tronco de sección transversal circular. Si la resistencia de una viga es proporcional al ancho y al cuadrado de su altura. Encontrar las dimensiones de la sección transversal que da la viga de mayor resistencia.
69. Una página para impresión va a contener 24 pul^2 de área impresa, un margen de $1\frac{1}{2}$ pul en las partes superior e inferior y un margen de 1 pul en los lados. ¿Cuáles son las dimensiones de la página más pequeña que llenaría estas condiciones?

Respuestas: Ejercicios

- 1.1. Creciente : $(-\infty, -\frac{1}{2})$, Decreciente : $(-\frac{1}{2}, \infty)$; 1.2. Creciente : $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$, Decreciente : $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$;
- 1.3. Creciente : $(-\infty, -1) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$, Decreciente : $(-1, \frac{3}{2})$; 1.4. Creciente : \mathbb{R} , Decreciente : \emptyset ;
- 1.5. Creciente : $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$, Decreciente : $(\frac{1}{3}, 1)$; 1.6. Creciente : $(-1, 0) \cup (4, \infty)$, Decreciente : $(-\infty, -1) \cup (0, 4)$;
- 1.7. Creciente : $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$, Decreciente : $(-1, 0) \cup (1, \infty)$; 1.8. Creciente : $(0, \frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$, Decreciente : $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, 1)$;
- 1.9. Creciente : $(-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, \infty)$, Decreciente : $(-2, -1) \cup (1, 2)$; 1.10. Creciente : $(-1, \infty)$, Decreciente : $(-\infty, -1)$;
- 1.11. Creciente : $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{12}{7}) \cup (4, \infty)$, Decreciente : $(\frac{12}{7}, 4)$; 1.12. Creciente : $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, Decreciente : $(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$;
- 1.13. Creciente : $(-\infty, 4)$, Decreciente : $(4, 6)$; 1.14. Creciente : $(0, \frac{1}{2}) \cup (2, \infty)$, Decreciente : $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, 2)$;
- 1.15. Creciente : $(-\frac{1}{6}, 0) \cup (0, \infty)$, Decreciente : $(-\infty, -\frac{1}{6})$; 1.16. Creciente : $(-\infty, \frac{1}{8})$, Decreciente : $(\frac{1}{8}, \infty)$;
- 1.17. Creciente : $(0, \frac{3}{4})$, Decreciente : $(\frac{3}{4}, 1)$; 1.18. Creciente : $(-\infty, -\frac{2+\sqrt{7}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{7}-2}{3}, \infty)$, Decreciente : $(-\frac{2+\sqrt{7}}{3}, \frac{\sqrt{7}-2}{3})$;
- 1.19. Creciente : $(-\infty, 0) \cup (1, \frac{7}{6}) \cup (\frac{7}{6}, \infty)$, Decreciente : $(0, 1)$; 1.20. Creciente : $(-2, \infty)$, Decreciente : $(-\infty, -2)$;
- 1.21. Creciente : $(\frac{1}{4}\pi + n\pi, \frac{1}{2}\pi + n\pi) \mid n \in \mathbb{Z}$, Decreciente : $(n\pi - \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{4}\pi + n\pi) \mid n \in \mathbb{Z}$; 2. $a > 0$ y $b^2 - 3ac < 0$;

- 5.a. Ninguna; 5.b. $f(x) > 0$ y $g(x) > 0$; 5.c. Ninguna; 8.1. Valor mínimo : $(-1, -12)$, Valor máximo : $(1, 2)$;
- 8.2. Valor mínimo : $(1, 2)$, Valores máximos : $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}), (3, \frac{10}{3})$; 8.3. Valores mínimos : $(-1, -\frac{1}{2}), (5, \frac{5}{26})$, Valores máximos : $(-5, -\frac{5}{26}), (1, \frac{1}{2})$;
- 8.4. Valores mínimos : $(-4, -2), (-1, -2)$, Valores máximos : $(-3, 2), (0, 2)$; 8.5. Valores mínimos : $(0, 1), (1, 1)$, Valor máximo : $(\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$;
- 8.6. Valor mínimo : $(-\frac{\pi}{4}, -\sqrt{2})$, Valores máximos : $(-\frac{\pi}{2}, -1), (\frac{\pi}{2}, 1)$; 9.1. Valor mínimo : No tiene, Valor máximo : $(-\frac{1}{2}, \frac{81}{4})$;
- 9.2. Valor mínimo : $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1 - \frac{2}{9}\sqrt{3})$, Valor máximo : $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{2}{9}\sqrt{3})$; 9.3. Valor mínimo : $(\frac{3}{2}, -\frac{61}{4})$, Valor máximo : $(-1, 16)$;
- 9.4. No tiene valores extremos; 9.5. Valor mínimo : $(1, 0)$, Valor máximo : $(\frac{1}{3}, \frac{4}{27})$;
- 9.6. Valores mínimos : $(-1, 0), (4, -125)$, Valor máximo : $(0, 3)$; 9.7. Valor mínimo : $(0, 0)$, Valores máximos : $(-1, 1), (1, 1)$;
- 9.8. Valores mínimos : $(0, 0), (1, 0)$, Valor máximo : $(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$; 9.9. Valores mínimos : $(-1, -38), (2, 16)$, Valores máximos : $(-2, -16), (1, 38)$;
- 9.10. Valor mínimo : $(-1, -2)$, Valor máximo : No tiene; 9.11. Valor mínimo : $(4, 0)$, Valor máximo : $(\frac{12}{7}, f(\frac{12}{7}))$;
- 9.12. Valores mínimos : $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}), (1, 0)$, Valores máximos : $(-1, 0), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$; 9.13. Valor mínimo : $(6, 0)$, Valor máximo : $(4, 4\sqrt{2})$;
- 9.14. Valores mínimos : $(0, 0), (2, 0)$, Valor máximo : $(\frac{1}{2}, \frac{9}{8}\sqrt[3]{2})$; 9.15. Valor mínimo : $(-\frac{1}{6}, -\frac{5}{6}\sqrt[6]{6})$, Valor máximo : No tiene;
- 9.16. Valor mínimo : No tiene, Valor máximo : $(\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$; 9.17. Valores mínimos : $(0, 0), (1, 0)$, Valor máximo : $(\frac{3}{4}, \frac{3}{16}\sqrt{3})$;
- 9.18. Valor mínimo : $(\frac{\sqrt{7}-2}{3}, \frac{61}{27} - \frac{1}{27}\sqrt{7})$, Valor máximo : $(-\frac{2+\sqrt{7}}{3}, \frac{14}{27}\sqrt{7} + \frac{61}{27})$; 9.19. Valor mínimo : $(1, -1)$, Valor máximo : $(0, 0)$;
- 9.20. Valor mínimo : $(-2, -202)$, Valor máximo : No tiene; 9.21. Valor mínimo : $(\frac{1}{4}\pi + n\pi, 1) \mid n \in \mathbb{Z}$, Valor máximo : No tiene;
10. Mínimo en : $x = 3$, Máximo en : $x = -2$; 13. $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = 4$; 14. $a = -14$, $b = 21$, $c = 0$, $d = -3$;
- 15.1. Concava : Hacia arriba : $(0, \infty)$, Hacia abajo : $(-\infty, 0)$; 15.2. Concava : Hacia arriba : $(-\frac{5}{6}, \infty)$, Hacia abajo : $(-\infty, -\frac{5}{6})$;
- 15.3. Concava : Hacia arriba : $(\frac{1}{3}, \infty)$, Hacia abajo : $(-\infty, \frac{1}{3})$; 15.4. Concava : Hacia arriba : $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, Hacia abajo : $(-1, 1)$;
- 15.5. Concava : Hacia arriba : $(0, \infty)$, Hacia abajo : $(-\infty, 0)$; 15.6. Concava : Hacia arriba : $(-\infty, -1)$, Hacia abajo : $(-1, \infty)$;
- 15.7. Concava : Hacia arriba : $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$, Hacia abajo : $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$;
- 15.8. Concava : Hacia arriba : $(-\infty, -1) \cup (-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}) \cup (1, \infty)$, Hacia abajo : $(-1, -\frac{\sqrt{5}}{5}) \cup (\frac{\sqrt{5}}{5}, 1)$;
- 15.9. Concava : Hacia arriba : $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$, Hacia abajo : $(\frac{1}{2}, 1)$;
- 15.10. Concava : Hacia arriba : $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$, Hacia abajo : $(-2, 0)$; 15.11. Concava : Hacia arriba : $(0, \infty)$, Hacia abajo : $(-\infty, 0)$;
- 15.12. Concava : Hacia arriba : $(-1, \infty)$, Hacia abajo : No tiene; 15.13. Concava : Hacia arriba : $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$, Hacia abajo : $(0, \infty)$;
- 15.14. Concava : Hacia arriba : $(-1, 1)$, Hacia abajo : No tiene;
- 15.15. Concava : Hacia arriba : $((4n-1)\frac{\pi}{4}, (4n+1)\frac{\pi}{4}) \mid n \in \mathbb{Z}$, Hacia abajo : $((4n+1)\frac{\pi}{4}, (4n+3)\frac{\pi}{4}) \mid n \in \mathbb{Z}$;
- 15.16. Concava : Hacia arriba : $((4n+1)\frac{\pi}{4}, (4n+3)\frac{\pi}{4}) \mid n \in \mathbb{Z}$, Hacia abajo : $((4n-1)\frac{\pi}{4}, (4n+1)\frac{\pi}{4}) \mid n \in \mathbb{Z}$;
- 15.17. Concava : Hacia arriba : $(-\infty, 0)$, Hacia abajo : $(0, \infty)$;
- 15.18. Concava : Hacia arriba : $((4n+1)\frac{\pi}{2}, (4n+3)\frac{\pi}{2}) \mid n \in \mathbb{Z}$, Hacia abajo : $((4n-1)\frac{\pi}{2}, (4n+1)\frac{\pi}{2}) \mid n \in \mathbb{Z}$; 17. $a = \frac{39}{8}$, $b = \frac{13}{2}$;
18. $a = -1$, $b = 3$; 19. $a = \frac{2}{9}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = -\frac{4}{3}$, $d = \frac{7}{9}$; 20. $a = 6$, $b = 3$; 21. $a = 2$, $b = 2$, $c = 0$, $d = 3$;
- 22.a. Ninguna; 22.b. $g(x) > 0$, $f(x) > 0$, f, g con la misma monotonia; 22.c. $f'(g(x)) > 0$; 25. $a = -\frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{2}{3}$;
26. $a = 1$, $b = -3$, $c = 3$; 29.1. Creciente : \mathbb{R} , Decreciente : \emptyset , Valor Mínimo : No tiene, Valor Máximo : No tiene,
Concava hacia arriba : $(0, \infty)$, Concava hacia abajo : $(-\infty, 0)$, Punto de inflexión : $(0, -1)$;
- 29.2. Creciente : $(-\infty, -4) \cup (0, \infty)$, Decreciente : $(-4, 0) - \{-2\}$, Valor Mínimo : $(0, 3)$, Valor Máximo : $(-4, -5)$,
Concava hacia arriba : $(-2, \infty)$, Concava hacia abajo : $(-\infty, -2)$, Punto de inflexión : No tiene;
- 29.3. Creciente : $(\frac{1}{4}, \infty)$, Decreciente : $(0, \frac{1}{4})$, Valor Mínimo : $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$, Valor Máximo : $(0, 0)$,
Concava hacia arriba : $(0, \infty)$, Concava hacia abajo : \emptyset , Punto de inflexión : No tiene;
- 29.4. Creciente : $(-\infty, \frac{3}{2})$, Decreciente : $(\frac{3}{2}, 2) \cup (2, \infty)$, Valor Mínimo : No tiene,, Valor Máximo : $(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt[3]{4}}{4})$,
Concava hacia arriba : $(-\infty, \frac{9}{5})$, Concava hacia abajo : $(\frac{9}{5}, 2) \cup (2, \infty)$, Punto de inflexión : $(\frac{9}{5}, \frac{9\sqrt[3]{25}}{25})$;
- 29.5. Creciente : $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (6, \infty)$, Decreciente : $(2, 6)$, Valor Mínimo : $(0, 0)$, Valor Máximo : $(2, \sqrt[3]{32})$,
Concava hacia arriba : $(2, 6) \cup (6, \infty)$, Concava hacia abajo : $(-\infty, 0)$, Punto de inflexión : $(0, 0)$;
- 29.6. Creciente : $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, Decreciente : $(-1, 1)$, Valor Mínimo : $(1, -2)$, Valor Máximo : $(-1, 2)$,
Concava hacia arriba : $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$, Concava hacia abajo : $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$,
Punto de inflexión : $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{8}), (0, 0), (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{7\sqrt{2}}{8})$;
- 29.7. Creciente : $(0, \infty)$, Decreciente : $(-1, 0)$, Valor Mínimo : $(0, 0)$, Valor Máximo : No tiene, Concava hacia arriba : $(-1, \infty)$,
Concava hacia abajo : \emptyset , Punto de inflexión : No tiene;
- 29.8. Creciente : $(\frac{1}{4}, \infty)$, Decreciente : $(-\infty, \frac{1}{4}) - \{0\}$, Valor Mínimo : $(\frac{1}{4}, -\frac{15}{8}\sqrt[3]{2})$, Valor Máximo : No tiene,
Concava hacia arriba : $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, \infty)$, Concava hacia abajo : $(-\frac{1}{2}, 0)$, Punto de inflexión : $(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\sqrt[3]{4}), (0, 0)$;

- 29.9. Creciente : $(-\infty, \frac{3}{4})$, Decreciente : $(\frac{3}{4}, \infty)$, Valor Mínimo : No tiene, Valor Máximo : $(\frac{3}{4}, -\frac{23}{8})$, Concava hacia arriba : \emptyset , Concava hacia abajo : \mathbb{R} , Punto de inflexión : No tiene;
- 29.10. Creciente : $(0, \frac{1}{3})$, Decreciente : $(\frac{1}{3}, \infty)$, Valor Mínimo : $(0, 0)$, Valor Máximo : $(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\sqrt{3})$, Concava hacia arriba : \emptyset , Concava hacia abajo : $(0, \infty)$, Punto de inflexión : No tiene;
- 29.11. Creciente : \mathbb{R} , Decreciente : \emptyset , Valor Mínimo : No tiene, Valor Máximo : No tiene, Concava hacia arriba : $(1, \infty)$, Concava hacia abajo : $(-\infty, 1)$, Punto de inflexión : No tiene;
- 29.12. Creciente : \mathbb{R} , Decreciente : \emptyset , Valor Mínimo : No tiene, Valor Máximo : No tiene, Concava hacia arriba : $(0, \infty)$, Concava hacia abajo : $(-\infty, 0)$, Punto de inflexión : $(0, 1)$;
- 29.13. Creciente : $(1, \infty)$, Decreciente : $(-\infty, 1)$, Valor Mínimo : $(1, -6)$, Valor Máximo : No tiene, Concava hacia arriba : $(-\infty, 0) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$, Concava hacia abajo : $(0, \frac{2}{3})$, Punto de inflexión : $(0, -5), (\frac{2}{3}, -\frac{151}{27})$;
- 29.14. Creciente : $(\sqrt[3]{4}, \infty)$, Decreciente : $(0, \sqrt[3]{4})$, Valor Mínimo : No tiene, Valor Máximo : $(\sqrt[3]{4}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[6]{4})$, Concava hacia arriba : $(0, 4)$, Concava hacia abajo : $(4, \infty)$, Punto de inflexión : $(4, \frac{9}{4})$;
- 29.15. Creciente : $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$, Decreciente : $(-2, 0)$, Valor Mínimo : $(0, 0)$, Valor Máximo : $(-2, -4)$, Concava hacia arriba : $(-1, \infty)$, Concava hacia abajo : $(-\infty, -1)$, Punto de inflexión : No tiene;
- 29.16. Creciente : \mathbb{R} , Decreciente : \emptyset , Valor Mínimo : No tiene, Valor Máximo : No tiene, Concava hacia arriba : $(-\infty, -1)$, Concava hacia abajo : \emptyset , Punto de inflexión : No tiene;
44. $-2\sqrt{3}$ y $2\sqrt{3}$; 45. $x = 9$; 46. $(0, 0) : (4, 0) : (0, 6)$;
47. Lado del cuadrado : $\frac{10\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}$ Lado del triángulo : $\frac{30}{9+4\sqrt{3}}$; 48. 50×25 ; 49. No existe; 50. $x = 5$ y $y = 5$;
51. $x = 5 : y = -5$ y $d = 5\sqrt{2}$; 52. $\frac{9}{\sqrt{7}}$ km.; 53. Se corta en $\frac{4\sqrt{31}}{9+4\sqrt{3}}$; 54. 50×50 ; 55. $x = 9, y = 18$;
56. $8\sqrt{5}$; 57. $x = 3, y = \frac{3}{4}(4 - \pi)$; 58. Ancho = $40\sqrt{3}$; Altura = $40\sqrt{6}$; 59. $2\sqrt{2}$; 60. $x = 2$;
61. $x = 20, y = 40$; 62. 10×40 ; 63. 20×50 ; 64. Mínimo : $(\frac{4}{4+\pi}, \frac{(\pi+2)^2}{4(\pi+4)^2})$ Se corta en $\frac{4}{4+\pi}$; 65. $y = \frac{399}{64}$;
66. $x = \frac{25}{2}$; 67. $(\frac{39}{4}, -\sqrt{\frac{39}{8}}), (\frac{39}{4}, \sqrt{\frac{39}{8}})$

Bibliografía

1. Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.: "Cálculo". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. Stewart, J.: "Cálculo". Grupo Editorial Iberoamericano.